

ЛЕКЦИЯ 15

§ 15. Коэффициенттері тұрақты, біртекті емес бөлігі периодты екінші ретті сызықтық теңдеуді Фурье қатарын қолданып шешу

Екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу қарастырамыз:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t) \quad (1)$$

Мұнда $a_1, a_2 \in R$, $f(t) \in C(R)$, $f(t + \omega) = f(t)$ және Фурье қатарына жіктеледі деп есептелінеді.

Мына ауыстыру

$$x = e^{-\frac{1}{2}a_1 t} y$$

арқылы (1) теңдеуді

$$\ddot{y} + \left(\frac{a_1}{4} - a_2\right)y = f(t) \quad (2)$$

түріне келтіруге болады. Сондықтан (1) теңдеуді

$$y'' - a^2 y = f(t) \quad (3)$$

Немесе

$$y'' + a^2 y = f(t) \quad (4)$$

(3) теңдеуінің біртекті бөлігінің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{-at} + C_2 e^{at}$$

түрінде болады да, $y \equiv 0$ ден басқа ешбір периодты шешімді анықтамайды.

Ал (4) теңдеуінің біртекті бөлігінің жалпы шешімі

$$y(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at \quad (5)$$

болады да, $\frac{2\pi}{a}$ -периодты шешімдер жиынтығын анықтайды.

Біз (4) теңдеуді қарастырамыз және жалпылыққа кеселсіз, $f(t)$ функциясының периодын

$\omega = 2\pi$ деп есептейміз. Егер олай болмаса $\tau = \frac{2\pi}{\omega} t$ ауыстыруы арқылы $f(t)$

функциясының периодын 2π етуге болады.

Бұл функцияны $[-\pi; \pi]$ аралығында қарастыру жеткілікті. Сонда

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k \in N$$

Онда (4) теңдеудің периодты шешімін

$$x = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt), \quad t \in [-\pi; \pi] \quad (7)$$

түрінде іздейміз. Бұл қатарды формальды түрде екі рет дифференциалдап, (4) теңдеуге қойсақ,

$$\begin{aligned} a^2 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a^2 - k^2)(A_k \cos kt + B_k \sin kt) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad \forall t \in [-\pi; \pi] \end{aligned}$$

тепе-теңдігін аламыз.

1. $a \neq n \in N$ болса, (7) қатардың коэффициенттері былай анықталады:
- 2.

$$A_0 = \frac{a_0}{a^2}, \quad A_k = \frac{a_k}{a^2 - k^2}, \quad B_k = \frac{b_k}{a^2 - k^2}, \quad k \in N \quad (8)$$

Берілген $f(t)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан. (6) қатар $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты. Демек,

$$x(t) = \frac{a_0}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (9)$$

қатары да $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты. Ал оның мүшелерінің екінші ретті туындысынан құрылған қатардың

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{a^2 - k^2} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

коэффициенттері, (6) қатардың сәйкес коэффициенттерінен мына көбейткішімен

$$\mu^k = -\frac{k^2}{a^2 - k^2} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty$$

ғана өзгеше. Сондықтан бұл қатар бірқалыпты жинақты. Олай болса, (9) қатарды $[-\pi; \pi]$ -де екі рет дифференциалдауға болады және

$$\ddot{x}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{a^2 - k^2} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Сонымен (9) қатар (4) теңдеуді формальды түрде емес, заңды түрде қанағаттандырады, яғни оның 2π – периодты шешімі болады. Егер 2π – периодты (9) шешімге (4) теңдеудің біртекті бөлігінің жалпы шешімін, яғни (5) функцияны қоссақ, (4) теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Ол шешім жалпы жағдайда, яғни C_1, C_2 тұрақтыларының кез-келген мәнінде, 2π – периодты болмайды. Себебі қосылғыштардың бір бөлігі $2\pi/a$ – периодты да, ал қалғандары 2π – периодты. Сондықтан 2π – периодты шешім алу үшін C_1, C_2 -лерді белгілі бір шарт бойынша табу керек, яғни тиісті бастапқы шарт қойылуы керек. Егер де (4) теңдеуде $f(t + 2\pi) = f(t)$ болуымен қатар оған қойылған бастапқы шарт $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_0^1$ арқылы анықталатын шешім $x(t_0 + 2\pi) = x(t_0), \dot{x}(t_0 + 2\pi) = x_0^1$ шартын қанағаттандыратын болса, онда ол шешім 2π – периодты болады.

Шынында да, $\ddot{x}(t+2\pi) + a^2 x(t+2\pi) = f(t+2\pi) \equiv f(t)$. Жаңа функция енгізелік: $u(t) = x(t+2\pi) - x(t)$. Онда

$$\ddot{u} + a^2 u = \ddot{x}(t+2\pi) + a^2 x(t+2\pi) - (\ddot{x}(t) + a^2 x(t)) = f(t) - f(t) = 0 \text{ және}$$

$$u(t_0) = 0, \quad \dot{u}(t_0) = 0.$$

Сызықтық біртекті теңдеудің нөлдік шартты қанағаттандыратын шешімі тек нөлдік шешім ғана. Олай болса, $u(t) = 0, \quad \forall t \in R$, яғни $x(t+2\pi) = x(t), \quad \forall t \in R$.

2. $a = n \in N; a_n = b_n = 0$ болсын, яғни (6) қатарда n -ші қосылғыш болмасын, қалған k -лар ($k \neq n$) үшін (7) қатардың коэффициенттері (8) формуладан табылады. Ал A_n және B_n коэффициенттері үшін кез-келген тұрақтыларды алуға болады. Себебі бұл жағдайда

$$A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

қосылғыш $\ddot{x} + nx = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Егер де a_n және b_n коэффициенттерінің біреуі, не екеуі бірдей нөлден өзгеше болса, онда (6) қатардың $a_n \cos nt + b_n \sin t$ қосылғышына (5) теңдеудің $t(A_n \cos nt + B_n \sin nt)$ шешімі сәйкес келеді. Себебі, $\gamma = in$ саны теңдеудің $\lambda^2 + n^2 = 0$ сипаттаушы теңдеудің түбірлері. Бұл жағдайда (9) қатардың қалған мүшелері периодты функция болғанымен, n -мүшесі периодты емес. Олай болса, (4) теңдеудің периодты шешімі жоқ.

Тұрақты a_n және b_n қатарынан нөлге тең болмаған кезде, a коэффициенті бүтін n санына жақындаған сайын

$$A_n = \frac{a_n}{a^2 - n^2}, B_n = \frac{b_n}{a^2 - n^2}$$

коэффициенттерінің біреуі, не екеуі бірдей шұғыл өседі. Бұл жағдай әдетте *резонанстық жағдай* деп аталады. Оның мәнісі – мына гармоникалық тербелістің

$$A_n \cos nt + B_n \sin nt = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin(nt + \varphi), \varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_n}{B_n}$$

амплитудасының шексіз өсуінде.

М Ы С А Л Д А Р. Төмендегі теңдеулердің периодты шешімдерін табу керек.

$$1^0. \quad \ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin kt.$$

Мұнда $a = \sqrt{2} \neq n \in N$. Шешімді (9) қатар түрінде іздейміз. Сонда (8) формула бойынша

$$A_0 = 0, A_k = 0, B_k = \frac{1}{k_4(2 - k^2)}, \text{ себебі } a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{1}{k^4}, \quad k \in N.$$

Берілген теңдеудің периодты шешімі –

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k_4(2 - k^2)} \sin kt,$$

$$2^0. \quad \ddot{x} + 4x = \sin^2 t.$$

Мұнда $a = 2$. Оң жағындағы функцияны Фурье қатарына жіктегенде алынатын a_2, b_2 коэффициенттерін анықталық:

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) \cos 2t dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2t - \frac{1 + \cos 4t}{2}) dt = -\frac{1}{2}.$$

Ал $f(t) = \sin^2 t$ жұп функция болғандықтан $b_2 = 0$. Приодты шешімнің бар болуының шарты $a_2 = b_2 = 0$ орындалмай тұр. Олай болса, теңдеудің периодты шешімі жоқ.

$$3^0. \ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kt.$$

Мұнда $a = 1$. Оң жағында тұрған қатардың бірінші мүшесі жоқ, яғни $a_1 = b_1 = 0$. Шешім болатын (7) қатардан A_k, B_k $k \geq 2$ коэффициенттерін (8) формула бойынша табамыз, ал жоқ болып тұрған $a_1 \cos t + b_1 \sin t$

қосылғышына сәйкес периодты шешім үшін біртекті $\ddot{x} + x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін аламыз. Сонда берілген теңдеудің периодты шешімі

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1 - k^2)}$$

функциясы, C_1, C_2 – кез келген тұрақты.

Ж А Т Т Ы Ы У Л А Р.

Төмендегі теңдеулердің периодты шешімін табыңыз:

1. $\ddot{x} - 3x = f(t), f(t) = |t|, |t| \leq \pi, f(t + 2\pi) = f(t).$
2. $\ddot{x} + \dot{x} + x = |\sin t|.$

Жоғарғы ретті сызықтық біртекті емес периодты дифференциалдық теңдеудің периодты шешімін құрудың бір әдісі

Жоғарғы ретті сызықтық біртекті емес периодты дифференциалдық теңдеу қарастыралық

$$L_n(x) := x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = q(t), n \geq 2. \quad (1)$$

Мұнда $p_j(t), j = \overline{1, n}, q(t) \in C(R), p_j(t + \omega) = p_j(t), j = \overline{1, n}, q(t + \omega) = q(t).$

Сызықтық біртекті емес (1) теңдеуге сәйкес келетін сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$L_n(x) := x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0 \quad (2)$$

Айталық $x(t)$ (1) теңдеудің ізделіп отырған ω -периодты шешімі болсын. Онда

$$H_i x(t) := x^{(i-1)}(0) - x^{(i-1)}(\omega) = 0, i = \overline{1, n} \quad (3)$$

Айталық $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ (2) теңдеудің $[0; \omega]$ кесіндісіндегі шешімдерінің іргелік жүйесі болсын. Онда (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_n x_n(t) \quad (4)$$

түрінде болады. Оны (3) шеттік шартқа қоялық

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(x_1(0) - x_1(\omega)) + ... + C_n(x_n(0) - x_n(\omega)) = 0 \\ C_1(\dot{x}_1(0) - \dot{x}_1(\omega)) + ... + C_n(\dot{x}_n(0) - \dot{x}_n(\omega)) = 0 \\ \\ C_1^{(n-1)}(x_1(0) - x_1(\omega)) + ... + C_n^{(n-1)}(x_n(0) - x_n(\omega)) = 0 \end{array} \right.$$

Бұл – белгісіз $C_1, \dots, C_n$ -дерге қатысты алгебралық сызықтық біртекті жүйе. Оның анықтаушысы

$$\Delta(0; \omega) = \begin{vmatrix} x_1(0) - x_1(\omega) & \dots & x_n(0) - x_n(\omega) \\ \dot{x}_1(0) - \dot{x}_1(\omega) & \dots & \dot{x}_n(0) - \dot{x}_n(\omega) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(0) - x_1^{n-1}(\omega) & \dots & x_n^{n-1}(0) - x_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix} \quad (6)$$

Егер $\Delta(0; \omega) = 0$ болса, онда (5) жүйенің нөлдік емес шешімдері бар. Онда (2), (3) есептің нөлдік емес периодты шешімдері бар болады. Ал егерде $\Delta(0; \omega) \neq 0$ болса, онда (5) жүйенің тек нөлдік ғана шешімі, демек (2), (3) есептің тек нөлге тең ғана периодтық шешімі бар болады.

1-А Н Ы Қ Т А М А. Қос айнымалы t, s -терден тәуелді, t бойынша $n-1$ -ретке дейін үзіліссіз дифференциалданатын $K(t, s)$ функциясы t бойынша (2) теңдеудің $t = s$ нүктесінде мына бастапқы шарттарды

$$K(s,s)=\dot{K}(s,s)=\dots=\overset{(n-2)}{K}(s,s)=0, \overset{(n-1)}{K}(s,s)=1 \quad (7)$$

қанағаттандыратын шешімі болатын болса, оны *Коши** функциясы деп атайды.

Теңдеудің $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, коэффициенттері мен бос мүшесі $q(t)$ $[0; \omega]$ кесіндісінде үзіліссіз болғанда Коши функциясы бар және жалғыз болады.

Шынында да, Коши функциясын мына түрде ізделік

$$K(t,s) = C_1(s)x_1(t) + C_2(s)x_2(t) + \dots + C_n(s)x_n(t) \quad (8)$$

Мұнда $C_j(s)$, $j = \overline{1, n}$, – анықталуға тиіс белгісіз шамалар. Олар t айнымасынан тәуелсіз.

Сондықтан (4)-шешімдердің сызықтық комбинациясы болғандықтан, (2) теңдеудің шешімі, тек белгісіз $C_j(s)$ -лер анықталса болғаны. Ол үшін (8) функцияны (7) шартқа қоямыз.

Мұндағы $W(t,s)$ вронскианның n – жатық жолын (2) теңдеудің шешімдерінің іргелік жүйесімен ауыстырғанда алынған анықтауыш. Бұл формуладан Коши функциясының бар және жалғыз болатыны тікелей көрініп тұр.

2-А Н Ы Қ Т А М А. Егер қандай-да $n - 1$ ретке дейін үзіліссіз дифференциалданатын $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ функциялары сызықтық біртекті (2) теңдеудің

$$H_i \varphi_j(t) := \overset{(i-1)}{\varphi_j(0)} - \overset{(i-1)}{\varphi_j(\omega)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (10)$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімдері болса, онда оларды (1), (3) есептің шекаралық функциялары деп атайды.

1-ТЕОРЕМА. Егер $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, $q(t) \in C(R)$ және $\Delta(0; \omega) \neq 0$ болса,

*Кramer К.Х. (1893-1973) – швед математигі

онда $[0; \omega]$ кесіндісінде $\varphi_i(t)$ шекаралық функциялары бар және жалғыз болады және

$$\varphi_j(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{ij}(0; \omega)}{\Delta(0; \omega)} x_i(t), j = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Мұндағы $\Delta(0; \omega)$ – (6) формуладағы анықтауыш, ал $\Delta_{ji}(0; \omega)$ – сол анықтауыштың j -жатық жолы мен i -бағанасының қиылысында тұратын элементінің алгебралық толықтауышы.

Д Ә Л Е Л Д Е У І. Шекаралық $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ функцияларын мына түрде іздейміз (жалпы шешім негізінде)

$$\varphi_j(t) = C_{j1}x_1(t) + C_{j2}x_2(t) + \dots + C_{jn}x_n(t) \quad (12)$$

Мұндағы $C_{ij} - i, j = \overline{1, n}$ тұрақтылар. Шешімдердің сызықтық комбинациясы болғандықтан (12) – (2) теңдеудің шешімі. Белгісіз $C_{ji}, i, j = \overline{1, n}$, тұрақтыларды табу үшін (12) функцияларды (10) шекаралық шарттарға қоямыз. Сонда

[illegible]

Бұл – $C_{ji}, i = \overline{1, n}$, бойынша сызықтық біртекті емес алгебралық жүйе. Оның негізгі анықтаушы – $\Delta(0; \omega)$. Ол нөлге тең емес. Онда (13) жүйені Крамер әдісі бойынша шешіп, C_{ij} тұрақтылардың мәндерін табамыз.

$$C_{ji} = \frac{(-1)^{j+i}}{\Delta(0; \omega)} \begin{vmatrix} H_1 x_1(t) & \dots & H_1 x_{i-1}(t) & H_1 x_{i+1}(t) & \dots & H_1 x_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{j-1} x_1(t) & \dots & H_{j-1} x_{i-1}(t) & H_{j-1} x_{i+1}(t) & \dots & H_{j-1} x_n(t) \\ H_{j+1} x_1(t) & \dots & H_{j+1} x_{i-1}(t) & H_{j+1} x_{i+1}(t) & \dots & H_{j+1} x_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n x_1(t) & \dots & H_n x_{i-1}(t) & H_n x_{i+1}(t) & \dots & H_n x_n(t) \end{vmatrix} \quad (14)$$

Мұнда тұрған үлкен анықтауыш $-\Delta(0; \omega)$ анықтауышының j -жатық жолы мен i -бағанасын сызғаннан кейінгі алынған минор. Табылған C_{ji} – лердің $i, j = \overline{1, n}$, мәндерін (12) формулаға қойып,

$$\varphi_j(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{ji}(0; \omega)}{\Delta(0; \omega)} x_i(t) = \frac{\Delta_j(0; \omega, t)}{\Delta(0; \omega)} \quad (15)$$

$$\Delta_j(0; \omega, t) = \begin{vmatrix} H_1 x_1(t) & \dots & H_1 x_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{j-1} x_1(t) & \dots & H_{j-1} x_n(t) \\ x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ H_{j+1} x_1(t) & \dots & H_{j+1} x_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ H_n x_1(t) & \dots & H_n x_n(t) \end{vmatrix}, \quad j = \overline{1, n},$$

яғни $\Delta_j(0; \omega, t)$ анықтауышы $\Delta(0; \omega)$ анықтауышынан оның j -жатық жолын (2) теңдеудің шешімдерінің іргелік жүйесімен ауыстыру арқылы алынған. (15) формуладан $\varphi_j(t)$ шекаралық функциясының бар және жалғыз болатындығы тікелей көрініп тұр. Теорема дәлелденді.

Шекаралық функциялар $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ (2) теңдеудің шешімдерінің іргелік жүйесі болады. (12) теңдеудің жалпы шешімі олар арқылы $x(t) = C_1 \varphi_1(t) + \dots + C_n \varphi_n(t)$ түрінде жазылады.

2-ТЕОРЕМА. Егер $p_j(t) \in C[0, \omega)$, $j = \overline{1, n}$; $q(t) \in C[0; \omega]$ және $\Delta(0; \omega) \neq 0$ болса, онда (1), (3) есептің $[0; \omega]$ кесіндісінде анықталған жалғыз ғана шешімі бар болады және ол

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \int_0^{\omega(i-1)} K_t(\omega, s) q(s) ds + \int_0^t K(t, s) q(s) ds \quad (16)$$

формуласымен өрнектеледі.

Д Ә Л Е Л Д Е У І. (1), (3) есептің шешімін мына түрде ізделік

$$x_1(t) = C_1 \varphi_1(t) + \dots + C_n \varphi_n(t) + \int_0^t K(t, s) q(s) \quad (17)$$

Мұндағы

$$\psi(t) = \int_0^t K(t, s) q(s)$$

(1) теңдеудің $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = \dots = \psi^{(n-1)}(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дара шешімі болып табылады. Шынында да (7) формуланы ескерсек,

$$\psi^{(i-1)}(t) = \int_0^t K_t^{(i-1)}(t, s) q(s) ds, i = \overline{1, n}, \psi^{(n)}(t) = \int_0^t K_t^{(n)}(t, s) q(s) ds + q(t)$$

болады да,

$$L_n(\psi(t)) = \int_0^t (K_t^{(n)}(t, s) + p_1^{(n-1)} K_t^{(n-1)}(t, s) + \dots + K(t, s)) q(s) ds + q(t) = q(t).$$

Себебі $K(t, s)$ (2) теңдеудің t бойынша шешімі болғандықтан интеграл нөлге тең болады. Демек (17) функция (1) теңдеудің жалпы шешімі ((1)-дің дара шешімімен (2)-нің жалпы шешімінің қосындысы ретінде). Дара шешім $\psi(t)$ – ның мына

$$\psi^{(i-1)}(0) = 0, \psi^{(i-1)}(\omega) = \int_0^\omega K_t^{(i-1)}(\omega, s) q(s) ds, i = \overline{1, n}$$

қасиетін, шекаралық функциялардың (10) шартты қанағаттандыратынын ескеріп (17) шешімді (2) шартқа қойсақ:

$$C_j = -H_j \psi = -\psi^{(j-1)}(0) + \psi^{(j-1)}(\omega) = \psi^{(j-1)}(\omega) = \int_0^\omega K_t^{(j-1)}(\omega, s) q(s) ds, j = \overline{1, n}.$$

Табылған $C_j, j = \overline{1, n}$ тұрақтыларының мәндерін (17) формулаға қойып, (1) теңдеудің (3) шартты қанағаттандыратын шешімін

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \int_0^\omega K^{(j-1)}(\omega, s) q(s) ds + \int_0^t K(t, s) q(s) ds \quad (18)$$

аламыз. Ол жалғыз. Теорема дәлелденді.

З-А Н Ы Қ Т А М А. Қос айнымалының функциясы $G(t, s)$ мына шарттарды қанағаттандыратын болса:

1⁰. $G(t, s)$ $[0; \omega]$ кесіндісінде өзінің t бойынша алынған $(n-2)$ -ретке дейінгі, оны қоса санағандағы, туындыларымен бірге үзіліссіз, ал t бойынша $(n-1)$ -ретті туындысы $[0; \omega]$ кесіндісінде $t \neq s$ болғанда үзіліссіз және $t = s$ болғанда

$$G_t^{(n-1)}(s+0; s) - G_t^{(n-1)}(s-0; s) = 1$$

түріндегі секіріс жасайды;

2⁰. $G(t, s)$ айнымалы t бойынша (2) біртекті теңдеудің

$$H_i G(t, s) := G_t^{(i-1)}(0, s) - G_t^{(i-1)}(\omega, s) = 0, i = \overline{1, n}.$$

біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімі. Онда оны (1), (3) есептің *Грин* функциясы* деп атайды.

Дәлелденген (18) формуладағы шектері тұрақты интегралдарды екі интегралдың қосындысы түрінде жазалық

$$\int_0^{\omega^{(i-1)}} K(\omega, s)q(s)ds = \int_0^{t^{(j-1)}} K(\omega, s)q(s)ds + \int_t^{\omega^{(j-1)}} K(\omega, s)q(s)ds.$$

Енді мынадай функция енгізелік

$$G(t, s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) K^{(j-1)}(\omega, s), 0 \leq t < s \leq \omega \\ \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) K^{(j-1)}(\omega, s) + K(t, s), 0 \leq s < t \leq \omega \end{cases} \quad (19)$$

Бұл функция Грин функциясы болады. Оның Грин функциясының анықтамасындағы $1^0, 2^0$ қасиеттерді қанағаттандыратынын оңай дәлелдеуге болады.

Грин функциясы жалғыз, оның көмегімен (1), (3) есептің шешімін

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t, s)q(s)ds \quad (20)$$

түрінде жазамыз. (1) теңдеудің коэффициенттері мен бос мүшесі периодты және шекаралық (3) шарт периодты болғандықтан (§ 1-ті қараңыз) шешім периодты болады. Бұл шешімді екеу деп жорысақ, олардың айырымы біртекті (2) теңдеудің шешімі болар еді. Ал біз $\Delta(0; \omega) \neq 0$ жағдайды қарастырып отырмыз. Ол кезде (2) теңдеудің жалғыз ғана нөлдік шешімі бар. Олай болса, айырым нөлге тең, яғни (1) теңдеудің екі шешімі бірімен бірі беттеседі де жалғыз шешімді береді.

Периодты шешімді құруды $p_j(t), j = \overline{1, n}, q(t)$ функцияларының кез-келген периодтылық кесіндісінде $[(k-1)\omega, k\omega], k \in \mathbb{Z}$ осылайша жүргізіп, сосын бұл

кесінділерді біріктіру нәтижесінде R де анықталған ω периодты шешімді аламыз.

М Ы С А Л.

$$1^0. \ddot{x} + 4x = -5\cos 3t \quad (21)$$

теңдеуінің периодты шешімін табалық. $q(t) = -5\cos 3t$.

$\omega = \frac{2\pi}{3}$ саны бұл функцияның периодты. Сондықтан коэффициент пен бос мүшенің ортақ

периодты $\frac{2\pi}{3}$ саны. (21) теңдеуді $[0; \frac{2\pi}{3}]$ кесіндісінде қарастырамыз. Сызықтық біртекті

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

теңдеуінің шешімдерінің іргелік жүйесі болып $\cos 2t, \sin 2t$ табылады. Демек шекаралық функциялар

$$\varphi_1(t) = \frac{\Delta_1(0; \frac{2\pi}{3}; t)}{\Delta(0; \frac{2\pi}{3})} = \cos 2t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2t,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\Delta_2(0; \frac{2\pi}{3}; t)}{\Delta(0; \frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos 2t.$$

болып шығады. Грин функциясын (19) формуламен табамыз. Ол үшін $K(\frac{2\pi}{3}, s), \dot{K}_t(\frac{2\pi}{3}, s)$ мәндерін анықтаймыз.

$$K(\frac{2\pi}{3}, s) = \frac{1}{4}(\sin 2s - \sqrt{3} \cos 2s)$$

$$\Rightarrow \dot{K}_t(\frac{2\pi}{3}, s) = -\frac{1}{2}(\cos 2s + \sqrt{3} \sin 2s)$$

$$G(t, s) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{4}(\cos 2t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2t)(\sin 2s - \sqrt{3} \cos 2s) - \frac{1}{4}(\sin 2t - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2t) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\cos 2s + \sqrt{3} \sin 2s); 0 \leq t < s \leq \frac{2\pi}{3} \right. \\ \left. \frac{1}{4}(\cos 2t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2t)(\sin 2s - \sqrt{3} \cos 2s) - \frac{1}{4}(\sin 2t - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2t) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\cos 2s + \sqrt{3} \sin 2s) + \frac{1}{2}(\cos 2s \sin 2t - \cos 2t \sin 2s), 0 \leq s < t \leq \frac{2\pi}{3} \right\}. \end{cases}$$

Онда (21) теңдеудің шешімі (техникалық есептеулерден кейін)

$$x(t) = -5 \int_0^{\omega} G(t, s) \cos 3s ds = \cos 3t$$

болады.

Ж А Т Т Ы Ы У

Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық

$$L_2(x) := \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = q(t)$$

теңдеуі берілген. Мұндағы $a_1, a_2 \in R$ (нақты сандар), $q(t) - 2\pi$ -периодты функция, ал сипаттаушы

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

теңдеуінің түбірлері әртүрлі болсын. Қай кезде 2π -периодты шешімі бар болатынын анықтап, теңдеудің Грин функциясын құрыңыз.